第5章

微分と積分は水とコップ

❖

微分/積分というと，聞いただけで，食わず嫌いで「もうわからない！」となりがちかもしれません．しかし数式で示されていることであっても，実際には現実の日常生活で普段体験していることと全く同じであり，逆にいうとそれを数式で示しているだけなのです．
本章では日常生活で起きていることを例にとって，微分と積分がどんなものであるかを考えていきます．

❖

5-1 微分と積分を説明するまえに

● 微分/積分は日常生活でも目の前にある

普段生活している中にも，微分や積分の考え方を何気なく応用しているものが多々あります．本章では微分と積分の意味あいとそれぞれの関係を，水とコップを例にとり説明していきます．水とコップの例以外にも，移動速度と距離の関係などもまさしくこの微分/積分の関係であるといえます．

またこの微分/積分も，ほぼ全てが「足す」，「引く」，「かける」，「割る」で理解できます．恐れることはありません．

● 短い区間/時間で考える

微分/積分ともども言えることは，短い区間とか時間で一つの単位を考えるということです．たとえば時間で考えるとすれば，24時間かかる出来事を1μsec($=10^{-6}$sec)ごとで見ていけば，ある時間とその1μsecあとは，ほとんど変化しない状態だということは，直感的に日常生活でもわかることだといえます．

この1μsecの時間を，さらにより短い時間，つまり限りなくゼロに近づけて考え

る．これが微分/積分の基本的な考え方なのです．

5-2　コップに注ぐ水で微分を理解する

● コップの水の量を基準にすれば注ぎ込む水が微分なのだ

図5-1のように，コップに水が注がれていたとします．人間がペット・ボトルからコップに水を注ぐとすれば，ペット・ボトルの狭い口からとくとくと注がれる量は，いつも一定ではありません．注がれる量は多くなったり少なくなったりします．同じように注ぐ人がペット・ボトルの傾きを変えれば，これも注がれる量が変わることになります．

コップの中の水の量を基準として考えてみましょう．ある時間に100ccだとします．この5秒後に180ccだったとしても，この間にとくとくと注がれる量は時間ごとに変化するため，水の量は一定量で増加することはありません．

ところがある時間に100ccだったとして，その1μsec後に100.00002ccだとすると，

- 1μsecで0.00002cc増えた
- この間の変化量は一定だとみなすことができる

［図5-1］ペット・ボトルからコップに水を注ぐ

ということが言えます．このときの水の注がれる量を「単位時間（たとえば1sec）あたりの注入量」として考えてみれば，

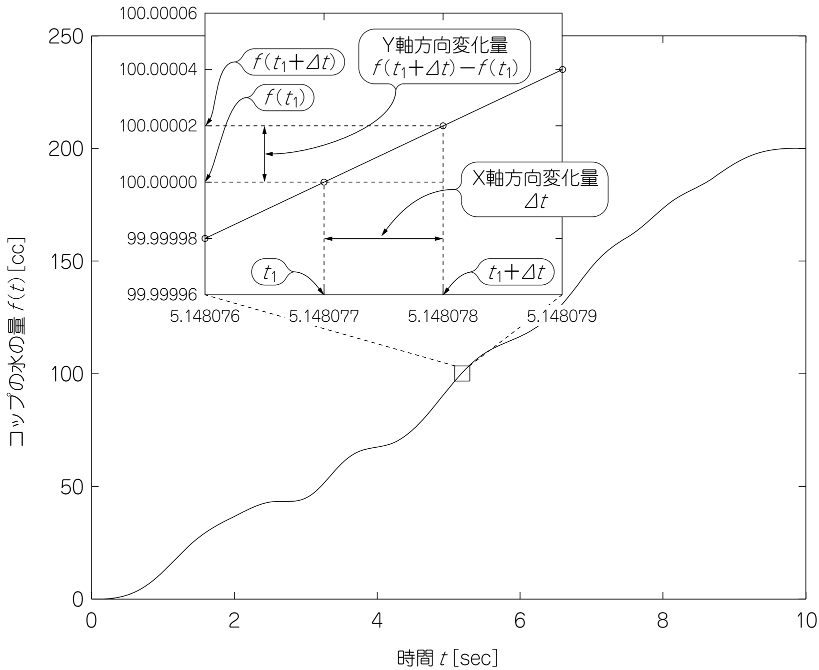
$$単位時間注入量 = \frac{0.00002\text{cc}}{1\mu\text{sec}} = 20\text{cc/sec}$$

と計算することができます．これは「ある一瞬をとった，瞬時の平均注入量」とも言えます．これが**微分**なのです．……これだけです．

ここではコップがいっぱいになるまでの十数秒のうちの1μsecを短い時間（区間）であると考えましたが，微分はこの**短い時間をゼロに限りなく近づけていく**，「微に入り細に入り，分割する」と考えるわけなのです．

● もう少し数学らしく微分を示す

コップに水が注がれて，水の量が**図5-2**のように変化していたとします．これは注ぐ人がペット・ボトルを傾けるようすと，とくとくと注がれるようすから，水の



［図5-2］コップの水の量をグラフ化して$f(t)$とする

量は一定で増えていきません．この水の量を$f(t)$として，時間tの関数として考えてみましょう．

① たとえばある時間t_1のとき(上記の100ccであるとき)の水の量を$f(t_1)$とする
② 1μsecの時間(実際にはかなり短い時間)をΔtとする
③ 1μsec後の水の量は$f(t_1+\Delta t)$になる
④「1μsecで0.00002cc増えた」増分は$f(t_1+\Delta t)-f(t_1)$と表現できる
⑤ この間の変化量は一定だとみなすことができる

これをもとに時間t_1のときの**単位時間相当**の注入量を考えれば，

$$\text{単位時間注入量}=\frac{f(t_1+\Delta t)-f(t_1)}{\Delta t}$$

と表すことができます．ここでΔtをゼロに限りなく近づけるように考えます．

$$\text{単位時間注入量}=f'(t_1)=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{f(t_1+\Delta t)-f(t_1)}{\Delta t}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\text{-}1)$$

ここで$\lim_{\Delta t\to 0}$は，Δtを限りなくゼロに近づけるというものです．$f'(t_1)$はあとで説明します．これをもとに**図5-2**を見てください．拡大してある部分でのX軸方向の変化量はΔtであり，Y軸方向の変化量は$f(t_1+\Delta t)-f(t_1)$です．Δtの間のY軸方向の変化量は完全に一定だとみなせるといえます．上の式(5-1)は**図5-2**の拡大部分のY方向の変化量/X方向の変化量，つまり**傾き**だということがわかりますね．

時間t_1のときの単位時間注入量$=f'(t_1)$としましたが，この$f'(t_1)$が$t=t_1$のときの$f(t)$の線の**傾き**(これを**微分係数**と呼ぶ)を示しているのです．

いまは$t=t_1$として「ある時点t_1」で考えましたが，これをtのままとし関数の全域で考えたもの……$f'(t)$（これを**導関数**と呼ぶ)，これが微分の数学的な考え方です．とはいっても日常生活を例にすると単純なことだとわかりますね．「微分は傾き」なのです．

▶ 微分/導関数の表し方

昔の数学者ごとにそれぞれ微分/導関数の表し方に違いがあり，それが現在でも異なる表記方法として用いられています．以下は全て同じことを言っているだけですので，何も心配しないでください(変数をtとしているが，xでも何でも，記号を何にするかの違いだけで同じこと)．

$$f'(t),\quad \{f(t)\}',\quad \dot{f}(t),\quad \frac{d}{dt}f(t),\quad \frac{df(t)}{dt},\quad y',\quad \frac{dy}{dt}$$

ここで$\dfrac{dy}{dt}$($\dfrac{dy}{dx}$も同じ)は，よく見るかたちかと思います．ここまで説明してきたように$dt = \Delta t$ ※1，つまりX軸方向の変化量であり，$dy = f(t+\Delta t) - f(t)$はY軸方向の変化量なので，$\dfrac{dy}{dt}$はただ割り算している※2ということだけなのです．

● 電気/無線数学で利用する微分公式

詳しい説明は微分/積分の参考書に任せることにして，ここでは電気/無線数学でよく利用する微分計算を公式として示しましょう(変数をtとしている．tをxにしても全く同じ．Aは定数)．

$$A' = 0,\quad t' = 1,\quad (At)' = A,\quad (At^2)' = 2At,\quad (At^n)' = nAt^{n-1}$$

$$\left(\frac{A}{t}\right)' = -\frac{A}{t^2},\quad \left(\frac{A}{t^2}\right)' = -\frac{A}{2t^3},\quad \left(\frac{A}{t^n}\right)' = -\frac{A}{nt^{n+1}}$$

$$(\sin t)' = \cos t,\quad (\cos t)' = -\sin t,\quad \{\sin(At)\}' = A\cos(At)$$

$$\{\sin(\omega t)\}' = \omega\cos(\omega t),\quad (e^t)' = e^t,\quad (e^{jt})' = je^{jt},\quad (e^{j\omega t})' = j\omega e^{j\omega t}$$

$$(\log_e t)' = \frac{1}{t}\quad (\log_e t = \ln t)$$

$$\{f(t) \pm g(t)\}' = \{f(t)\}' \pm \{g(t)\}',\quad \{f(t)g(t)\}' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

$$\left\{\frac{f(t)}{g(t)}\right\}' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{\{g(t)\}^2}$$

● 少し複雑な微分計算──「合成関数の微分」

$y = f(t)$，$t = g(x)$というように，「yの変数tは，xの関数である」というとき，つまり，

※1：もう少しきちんと説明しておくと，$dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t$である．

※2：「ただ」とは言っても限りなくゼロにまで細かくしている……**極限**をとっていることは忘れてはならない．