

試して納得！

IS Book  
Interactive Simulation Book

# わかる デジタル信号処理 基礎編

東京電機大学教授 工学博士 三谷政昭 著

最初から始める

続きから始める





## 【試して納得！】シリーズ刊行にあたって

デジタル信号処理 (DSP: Digital Signal Processing) 技術は、通信や音声&画像処理、制御、計測などの多彩な分野で当たり前のように使用される要素技術なので、今こそ、この技術をしっかりと使いこなせる専門家が求められています。

最近、学生や社会人の方々から、「DSPの基本的な原理を体系的にまとめた解説書があれば助かるのになあ」という声をよく耳にします。そんな声にお応えすべく、DSPの基本を体系的にまとめ、徹底してわかりやすく、インタラクティブ (Interactive, 対話的) にシミュレーション (Simulation) しながら、「楽しく読めて、目で見て、直感的にわかる」ソフトを世に出したいものだとか常々考えていました。

ところで、2005年9月に発刊した電子回路向け【楽しく学ぶ】シリーズは、「Interactive Simulation Book」略して『IS Book (アイエス・ブックと読む)』と称するソフトであり、世界で初めてのシミュレータ内蔵「電子教科書&参考書」です。そこで、電子回路向けの【楽しく学ぶ】シリーズのコンセプトを踏襲し、DSP解説書の実現に向けて、新たなシミュレーション・ソフトとして、【DSPシミュレータ・ソフト「商品名ディー・エス・ピー・アナライザ (DSP Analyzer)」】が開発されました。そうして、株式会社マイクロネット (信州事業所所長: 浜三弘 氏) との産学連携により、DSPシミュレータを内蔵した『IS Book』として、新シリーズ【試して納得！】の発刊にこぎつけた次第です。

少々手前みそですが、DSPがどんなものなのかをすばやく知って、即座に活用するための“特効薬”となるように、「今日から使える、使いこなす、使いこなせる」ための基礎を小気味よく解説してあります。

「開けてビックリ!! 玉手箱」じゃあないけれど、本シリーズのテキスト (CD-ROM) をパソコンに突っ込んで、スイッチオン。すると、どうでしょう。仕掛け絵本のように、回路図、回路部品、工作道具、オシロスコープなどが飛び出してきました。そうして、テキストの説明を読みながら、DSPのリアルタイム・シミュレーション実験が体感できて、基礎から応用までを習得できるように、数多くの工夫が凝らしてあります。

### (1) 数式の使用をできるだけ避けること


数式は一つの言葉なので、物理的なイメージと結びつけることが大切です。た

だやみくもに数式を暗記するだけでは、内容がさっぱりわからないというジレンマに陥ってしまいます (いわゆる、「理数離れ」症候群)。そのため、数式の表現力に頼ることをできるだけ避けて、数式を物理的な言葉で“翻訳”した表現を心がけ、みなさんの「数式に対するアレルギー」を取り去ってまいります。そうして、直感的な理解、イメージをみなさんに植え付けます。なぜなら、物の本質の理解には順序だった (へ?) 理屈も大切ですが、これ以上に重要なものは「直感的な理解、イメージ」なので (筆者の経験から言えることですが...)。

### (2) 説明の順序を理解しやすい並びにすること

みなさんの理解しやすいことを目標に、いままでのDSPの参考書にありがちな内容説明の流れにとらわれず自由な形で構成しました。

### (3) チェックBOXで理解したかどうかを自己評価できること

原則として見開き1~2ページで説明を終える形式とし、**check BOX**  の質問で理解度を確認できるようになっています。

本書は、DSPが初めてという人、専門書を読んではみたが難しくてどうもとっつきにくい、わかりにくいと困っている人をとくに意識して、わかりやすく解説してあります。なお、すでに勉強したことがある人でも、副読本や復習のための参考として役立ててもらえるものと思います。

また、わかりやすく系統立てて段階的に習得できるようになっていますから、しっかりと読み進んでいってもらう過程において、短期間にデジタル信号処理の基礎から応用までの必須知識をスムーズに身につけてもらえるものと確信しています。

最後まで読破したあとには、webサイトに「応用問題」があります。どのぐらいの実力がついたのが、確認ができます。 [サイトへ \(要登録\)](#)

終わりに、【試して納得！】シリーズを読破されたみなさんには、実践的な経験を通して、デジタル信号処理に精通した技術者として活躍されんことを期待しつつ、筆を置くことにします。



### 目次

【試して納得！】シリーズ刊行にあたって . . . . .	2	第三章 IIRフィルタの基礎を知ろう . . . . .	52
目次 . . . . .	3	三の1 IIRフィルタとはどんなもの? . . . . .	53
自分で「試して納得！」できるIS Bookについて . . . . .	4	三の2 IIRフィルタにインパルス信号を入力してみると . . . . .	55
序章 メロディを四則計算で奏でることができるってホント? . . . . .	5	三の3 IIRフィルタのゲイン特性を見てみよう . . . . .	56
第一章 FIRフィルタの基本を知ろう . . . . .	8	三の4 1次IIRフィルタの基本構成とゲイン特性 . . . . .	58
一の1 FIRフィルタとはどんなもの? . . . . .	9	三の5 ローバーストIIRフィルタ . . . . .	59
一の2 FIRフィルタの係数を変えてみよう . . . . .	11	三の6 ハイバーストIIRフィルタ . . . . .	61
一の3 FIRフィルタにインパルス信号を入力してみると . . . . .	13	三の7 バンドバーストIIRフィルタ . . . . .	63
一の4 FIRフィルタにステップ信号を入力してみると . . . . .	14	三の8 ハイローバーストIIRフィルタ . . . . .	65
一の5 基本ローパス・フィルタ . . . . .	15	三の9 2次IIRフィルタの基本構成とゲイン特性 . . . . .	67
一の6 デジタル・フィルタの周波数の素はメモリ . . . . .	17	三の10 2次IIRフィルタの安定性を調べてみよう . . . . .	69
一の7 1次LPFのゲイン特性の簡易計算テクニック . . . . .	19	第四章 いろいろなIIRフィルタを作ってみよう . . . . .	71
一の8 Mサンプル遅延・基本LPF . . . . .	21	四の1 1次FIR-1次IIR複合フィルタ(双1次フィルタ) . . . . .	73
一の9 Mサンプル遅延・基本LPFを継続接続すると . . . . .	22	四の2 1次IIR-FIR複合フィルタ(メモリの節約) . . . . .	75
一の10 基本ハイパス・フィルタ . . . . .	24	四の3 双1次ローパスIIRフィルタ . . . . .	77
一の11 1次HPFのゲイン特性の簡易計算テクニック . . . . .	25	四の4 ローパス特性を変身させると . . . . . (周波数変換) . . . . .	78
一の12 Mサンプル遅延・基本HPF . . . . .	27	四の5 オールパスIIRフィルタ . . . . .	81
一の13 Mサンプル遅延・基本HPFを継続接続すると . . . . .	28	四の6 2次IIR-1次FIR複合フィルタとゲイン特性 . . . . .	83
第二章 いろいろなFIRフィルタを作ってみよう . . . . .	29	四の7 双2次IIRフィルタとゲイン特性 . . . . .	84
二の1 2次LPFの基本構成とゲイン特性 . . . . .	30	四の8 ゲイン特性がほっそりしたり、太ったり? . . . . .	86
二の2 2次HPFの基本構成とゲイン特性 . . . . .	31	四の9 ゲイン特性の中心周波数が左右に動く? . . . . .	87
二の3 基本バンドパス・フィルタ(2次BPF) . . . . .	33	四の10 LCRアナログ・フィルタを四則計算で実現すると . . . . .	88
二の4 基本バンドエリミネート・フィルタ(2次BEF) . . . . .	35	付録1 三角関数の公式集 . . . . .	90
二の5 任意のノッチを有する2次BEF . . . . .	37	付録2 式(2-32)、式(2-35)、式(2-38)、式(2-40)の算出プロセス . . . . .	91
二の6 ローバーストによるハイパス・フィルタの帯域拡張 . . . . .	39	付録3 式(3-55)の算出プロセス . . . . .	92
二の7 ハイバーストによるローパス・フィルタの帯域拡張 . . . . .	41	付録4 式(4-9)の算出プロセス . . . . .	93
二の8 バンドバースト・フィルタ . . . . .	43	付録5 利得定数の考え方 . . . . .	94
二の9 ハイローバースト・フィルタ . . . . .	44	操作方法 . . . . .	95
二の10 2サンプル遅延2次BEF . . . . .	45	実験室 . . . . .	105
二の11 ローパスノッチ・フィルタ . . . . .	46	著者略歴/参考文献 . . . . .	108
二の12 ハイパスノッチ・フィルタ . . . . .	48		
二の13 バンドパスノッチ・フィルタ . . . . .	50		

第一章

FIRフィルタの基本を知ろう

アナログ信号は従来アナログ・フィルタにより処理されてきたが、現在ではデジタル信号処理が主流になり、フィルタリング（信号の周波数選択特性）目的のためにデジタル・フィルタが多用されている。デジタル・フィルタリングは、コンピュータ・プログラム（計算アルゴリズムに等価）の形でソフトウェアにより実現される。また、ソフトウェア実現のみならず、加算器、乗算器、メモリ（シフトレジスタ）で構成してハードウェア化されることも多い。

その結果、デジタル・フィルタを実現するコストや複雑さは、抵抗やコイル、コンデンサなどのアナログ回路部品で構成するアナログ・フィルタよりも格段に軽減されることになった。さらには、柔軟性、汎用性、安定性に優れたデジタル・フィルタの計り知れない利点から、アナログ・フィルタの牙城であったさまざまな応用分野に入り込んでいったのである。一般に、デジタル・フィルタは、FIRフィルタとIRフィルタとに大別される。

本章では、まずFIRフィルタの基本を学ぶ。FIRはFinite Impulse Responseの頭文字を並べたもので、有限の継続時間のインパルス応答を有するという意味であり、メモリと2入力1出力の加算器が各3個、および4個の乗算器で構成される例を図1-0に示す。

それでは、FIRフィルタを理解するためのウォーミングアップとして、図1-0の乗算係数（A、B、C、D）を書き換え、正弦波（cos波）やインパルス入力に対する応答出力波形や周波数選択特性のようすについて、楽しみながら実験を進めてもらいたい。

その際、正弦波は周波数、インパルスは電圧の大きさを変えられるので、矢印カーソルを部品の中心から上下にずらして左クリックしてほしい。また、オシロスコープのNEWやFREEZE、周波数アナライザのPhaseやGain、LinやdBなどのスイッチを左クリックしてみよう（オシロスコープの使い方、周波数アナライザの使い方）。インパルスと正弦波の取り替えには、矢印カーソルを部品の中央に持って行って左クリックすると動かせる。とにかく、“習うより慣れる”の精神で、回路や測定器のいろいろなところをクリックしてみることをお勧めする。みなさんの頑張りを期待していますよ。

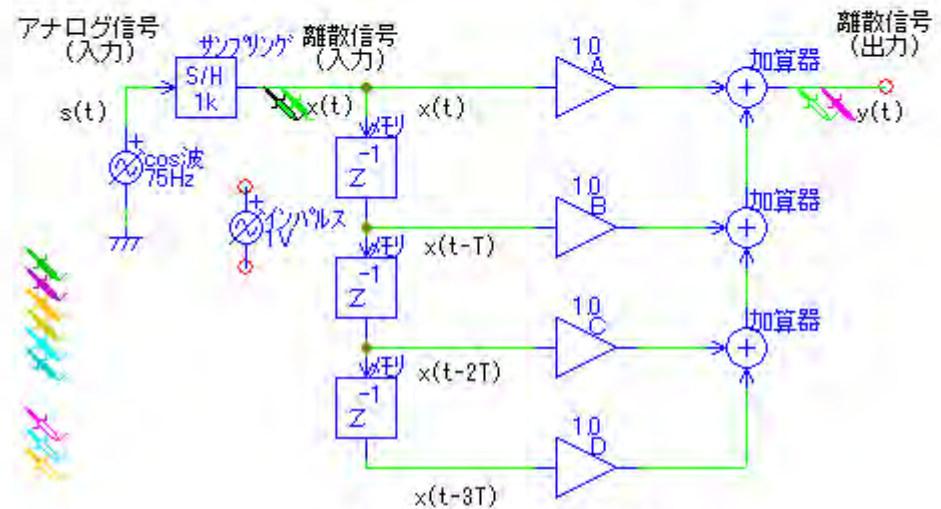
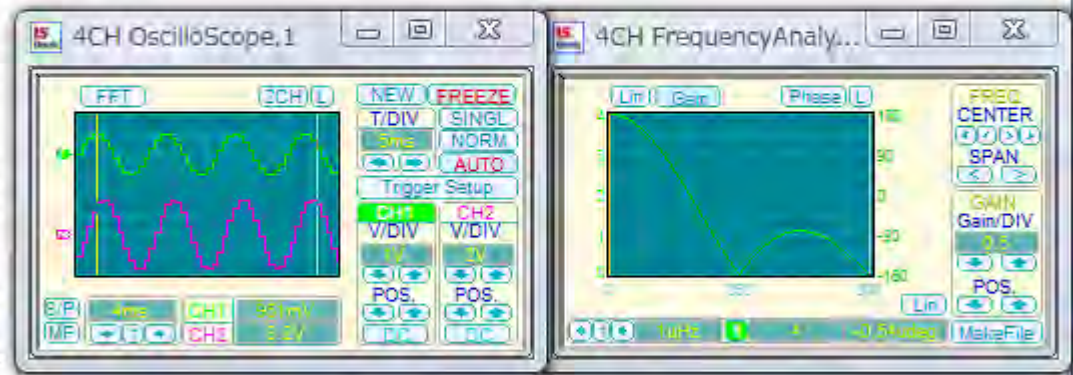


図 1-0 FIRフィルタの構成例



一の1

FIRフィルタとはどんなもの？【1/2】

FIRフィルタは、現在の入力信号  $x(t)$  と過去の  $M$  値の入力信号  $\{x(t-T), x(t-2T), \dots, x(t-MT)\}$  から出力信号を得るシステムである (図1-1)。出力信号  $y(t)$  は、 $(M+1)$  個の乗算係数  $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_M\}$  を用いて、

$$y(t) = a_0x(t) + a_1x(t-T) + a_2x(t-2T) + \dots + a_Mx(t-MT) \quad (1-1)$$

で表され、**積和計算**と呼ばれる。このとき、 $T$ [秒]ごとのサンプリング処理、すなわち  $t=kT$  ( $k$ は整数) における信号値に着目して、

$$x[k] = x(kT), \quad y[k] = y(kT)$$

と表記すれば、式 (1-1) の等価な計算式 (差分方程式という) として、

$$y[k] = a_0x[k] + a_1x[k-1] + a_2x[k-2] + \dots + a_Mx[k-M] \quad (1-2)$$

が得られ、FIRデジタル・フィルタ (略してFIRフィルタ) と称する。これ以降、式 (1-1) あるいは式 (1-2) の表現を適切に用いて説明するが、DSPアナライザによるシミュレーションは式 (1-1) の表現形式に基づく。

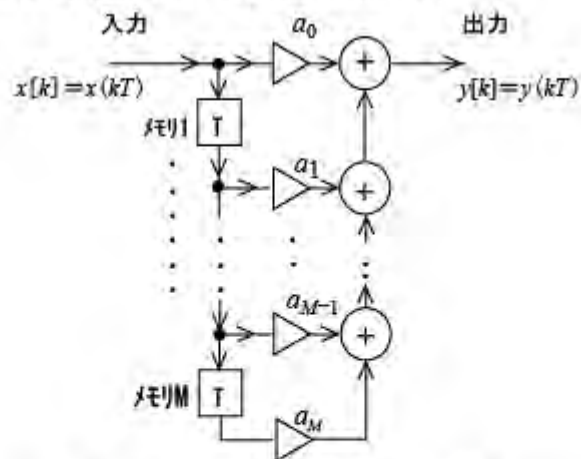


図 1-1 FIRフィルタのシステム構成例

それでは、図1-2のFIRフィルタの入出力応答について、デジタルテストを用いて1ステップずつ解析してみよう (サンプリング時間  $T$ [秒]=0.001[秒])。このFIRフィルタの出力は、

$$y(t) = 2x(t) + 3x(t-T) - x(t-2T) \quad (1-3)$$

で計算され、2個のメモリ、3個の乗算器 (図1-1の乗算係数  $a_0=2, a_1=3, a_2=-1$  に設定)、2個の加算器 (正確には、2入力1出力の加算器) から構成されている。なお、メモリは、遅延器、遅延レジスタ、レジスタメモリなどと呼ばれることもある。

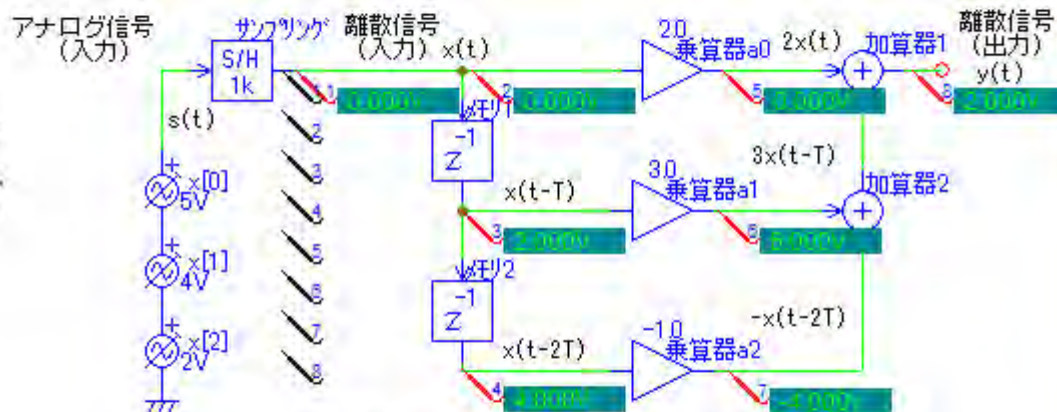


図 1-2 式 (1-3) に基づく FIRフィルタの構成例

例えば、入力信号を図1-3とするととき、カーソルを8個のデジタルテストのうち、いずれか一つの中央にもっていき、右クリックするとメニュー画面 (図1-4) が現れる。

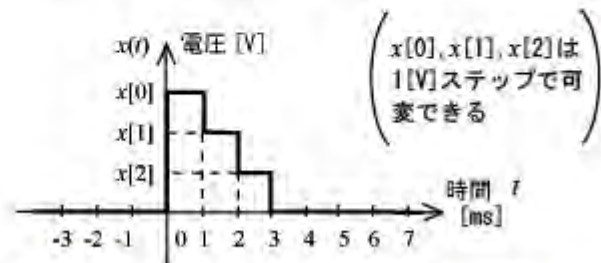

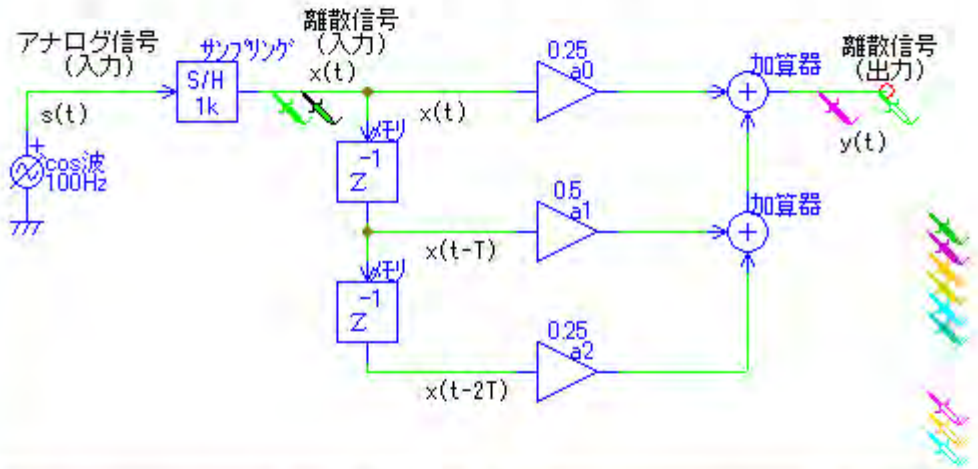


図 1-3 入力信号例 (サンプリング周波数  $f_s=1$ [kHz])

一の二

FIRフィルタの係数を変えてみよう【2/2】

次に、図1-7に示す2個のメモリ、3個の乗算器、2個の加算器で構成されるFIRフィルタについて、乗算係数  $a_0, a_1, a_2$  をいろいろな値に設定し、図1-7の緑色のプローブ（) を出力につなぎ、いろいろなゲイン特性の形状の違いをチェックしてみよう。



周波数アナライザのゲイン特性から分かるように、ローパス、ハイパス、バンドパス、バンドエリミネート、オールパスの各特性を実現できる（図1-8）。

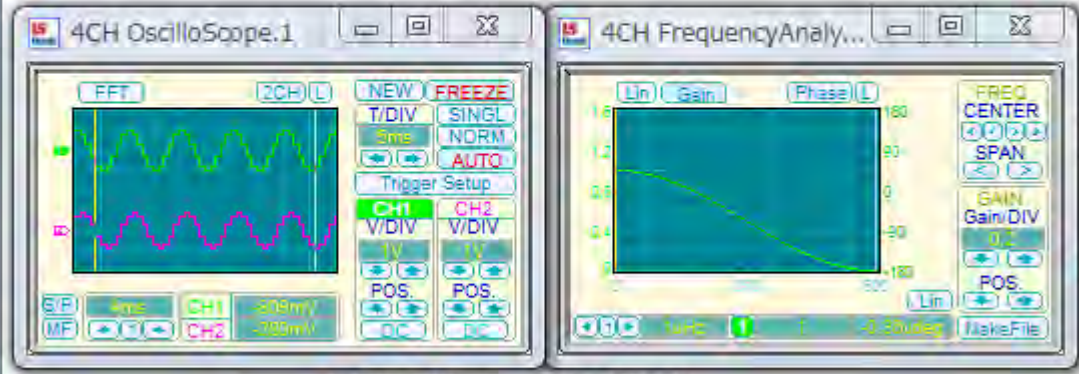
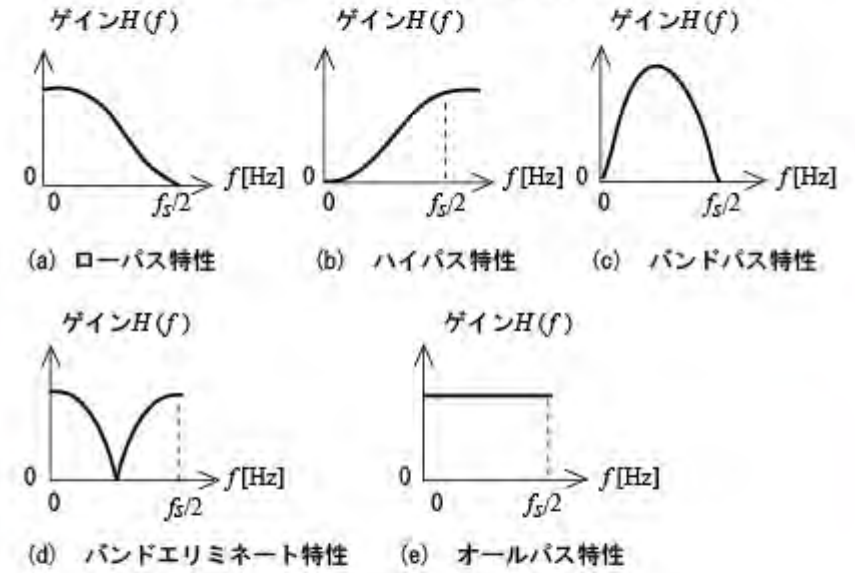



図 1-7 2次FIRフィルタの構成例

図 1-8 2次FIRフィルタのゲイン特性の分類

このように、FIRフィルタの乗算係数を単に変えるだけで、さまざまなタイプのゲイン特性を実現できるわけで、アナログ・フィルタとは一線を画す特長（例えば、ハンダ付け、回路設計などのわずらわしさが無い）を体験できる。

 check BOX（正解と思う数字を半角で入力し“ENTER”キーを押す）  
いま、図1-7の三つの乗算係数を  $a_0=-1, a_1=2, a_2=-1$  とするとき、どのようなゲイン特性を有するか。

- ① ローパス      ② ハイパス      ③ バンドパス
- ④ バンドエリミネート      ⑤ オールパス

（答）

一の5

基本ローパス・フィルタ【2/2】

つまり、式(1-16)に基づき、入力  $x(t)$  を  $T/2$ [秒] 遅らせた (右に平行移動した) 波形  $x(t - \frac{T}{2})$  を得て、 $2|\cos(\pi f T)| (= 2|\cos(\frac{\omega T}{2})|)$  倍した出力を得る FIR フィルタであることが分かる。このとき、

- ①  $-\frac{T}{2}$  は、ずれ時間で、単位は[秒]
- ②  $-\pi f T$  あるいは  $-\frac{\omega T}{2}$  は位相 (フェーズ, phase) で、単位は[rad]であり、

$$(\text{位相}) = (\text{角周波数}) \times (\text{ずれ時間}) \quad (1-18)$$

で表される関係が成り立つ。一般的には、


$$(\text{ずれ時間}) = (\text{位相を角周波数 } \omega \text{ で微分した値}) \quad (1-19)$$

であり、位相が周波数に対して比例関係にある場合は、とくに線形位相 (linear phase) という。なお、図1-13のFIRフィルタは、「ずれ時間が周波数に関係なく一定値を採る」ので、線形位相FIRフィルタと呼ばれることもある。

以上より、式(1-12)～式(1-15)に基づき、図1-13のFIRフィルタのゲイン (入力を何倍して出力するかを表すパラメータ) と位相 (入力と出力の時間ずれを角度換算したもの) の理論値をまとめておく。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ゲイン特性} : 2 \left| \cos \left( \frac{\omega T}{2} \right) \right| (= 2 |\cos(\pi f T)|) \end{array} \right. \quad (1-20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{位相特性} : -\frac{\omega T}{2} (= -\pi f T) \end{array} \right. \quad (1-21)$$

このとき、図1-14の周波数アナライザの画面には、明るい緑色でゲイン特性、暗い緑色で位相特性が表示される。さらに、周波数アナライザ下部の  にある左右の矢印をクリックすることにより、周波数  $f$ [Hz] に対するゲインと位相の数値が表示されるので、式(1-20)と式(1-21)の理論値に一致することを確認してもらいたい。

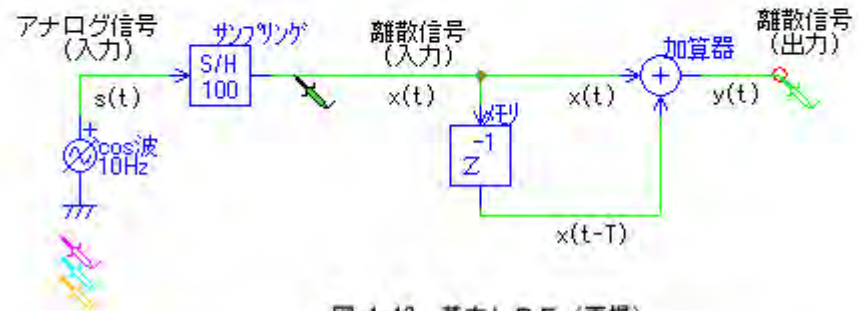


図 1-13 基本LPF (再掲)

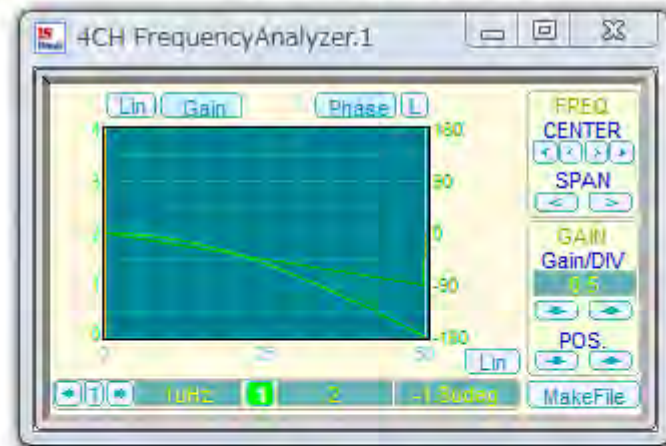


図 1-14 基本LPFの周波数特性



check BOX (正解と思う数字を半角で入力し“ENTER”キーを押す)

$y(t) = x(t) + x(t - 2T)$  で表される入出力関係を有するFIRフィルタのずれ時間は、いくらになるか。ただし、 $T = 0.1$ [秒]とする。

- ① 0.05[秒] ② 0.1[秒] ③ 0.15[秒] ④ 0.2[秒] (答)

一の9

Mサンプル遅延・基本LPFを連続接続すると・・・【2/2】

例えば、2 サンプル遅延・基本LPFを4段連続接続したフィルタ ( $M=2, K=4$ )  
 では、周波数アナライザ画面には四つのゲインが表示される (図1-24) : 緑色  
 は1段 ( $K=1$ )、ピンク色は2段、オレンジ色は3段、水色は4段であるので、  
 ゲイン特性の違いを目で見えて確認してもらいたい。また、サンプル遅延回数  $M$   
 を3, 4, 5, …, と変えて、ゲイン特性の変化も調べてみよう。

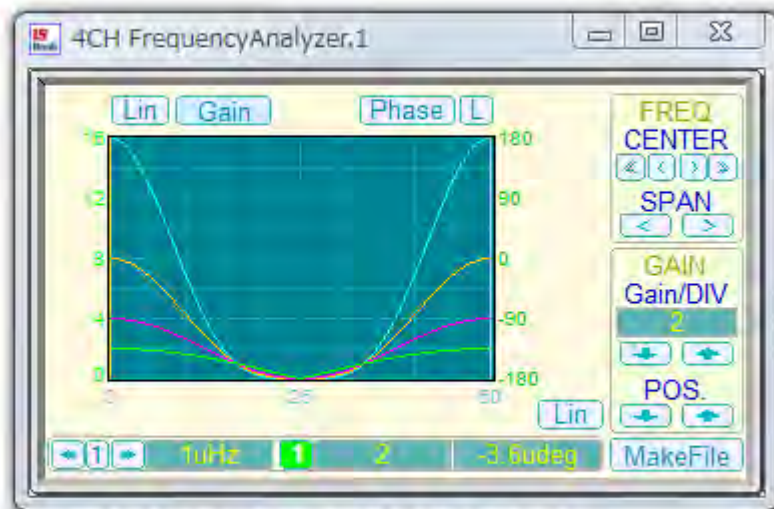
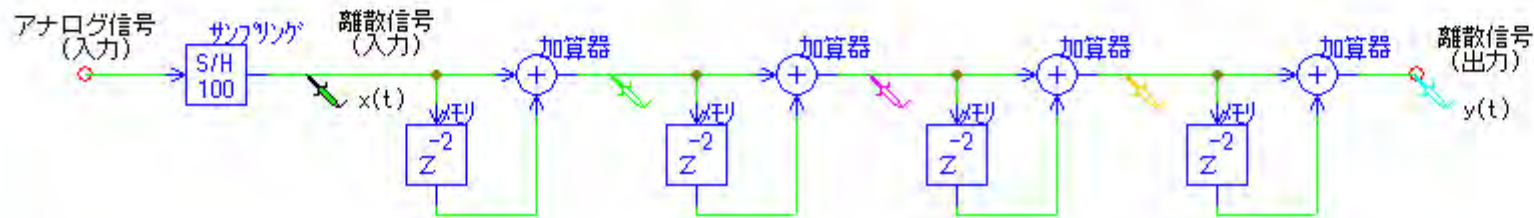


図 1-24 Mサンプル遅延・基本LPFの連続構成



check BOX (正解と思う数字を半角で入力し“ENTER”キーを押す)  
 1 サンプル遅延・基本LPF ( $M=1, K=4$ ) のゲイン特性  $|H|$  が 4 になる  
 周波数 [Hz] はいくらか。ただし、サンプリング周波数は 10 [Hz] とする。

- ① 2    ② 2.5    ③ 3    ④ 4    ⑤ 6    (答)



第二章

いろいろなFIRフィルタを作ってみよう

本章では、FIRフィルタのゲイン特性に着目して、さまざまなタイプを紹介する。  
 代表的なゲイン特性を有するFIRフィルタとして、

- ① ローパス・フィルタ
- ② ハイパス・フィルタ
- ③ バンドパス・フィルタ
- ④ バンドエリミネート・フィルタ
- ⑤ ローバースト特性フィルタ
- ⑥ ハイバースト特性フィルタ
- ⑦ バンドブースト特性フィルタ
- ⑧ ハイローバースト特性フィルタ
- ⑨ ローパスノッチ・フィルタ
- ⑩ ハイパスノッチ・フィルタ
- ⑪ バンドパスノッチ・フィルタ

を取り上げて説明する。そこで、図2-0に示すFIRフィルタにおいて、表2-1の係数値 (A, B, C, D) とメモリの遅延回数を設定し、周波数アナライザでゲイン特性の特徴を体感してもらいたい。

表 2-1 各種FIRフィルタのパラメータ設定例

種類	乗算係数				メモリの遅延回数
	A	B	C	D	
①	0.12	0.38	0.38	0.12	1
②	0.12	-0.38	0.38	-0.12	1
③	0.5	0	-0.5	0	1
④	0.5	0	0.5	0	1
⑤	1.5	0.5	0	0	1
⑥	1.5	-0.5	0	0	1
⑦	1.6	0	-0.4	0	1
⑧	1.33	0	0.69	0	1
⑨	0.25	0.25	0.25	0.25	1
⑩	0.16	-0.33	0.33	-0.16	1
⑪	0.25	-0.25	0.25	-0.25	2

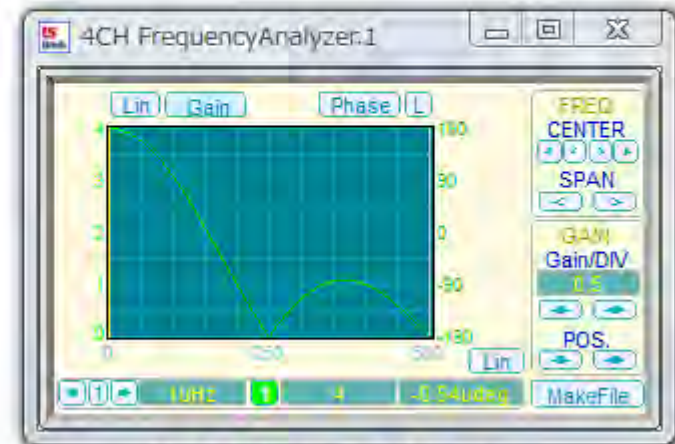
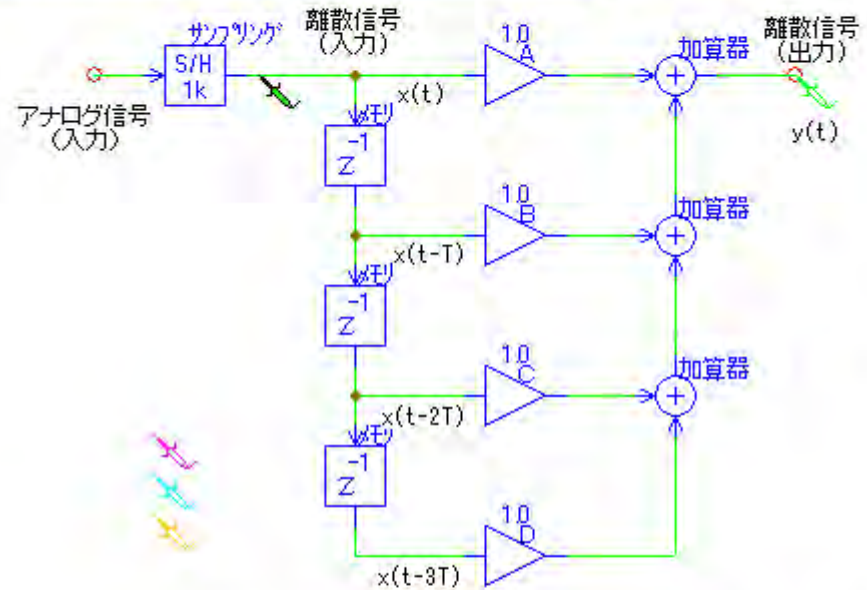


図 2-0 FIRフィルタのゲイン特性

二の1

2次LPFの基本構成とゲイン特性

まず、図2-1に2次FIRフィルタの構成例を示す。図2-1に依れば、1段目の遅延（メモリ）出力  $z^{-1}X$  と乗算係数  $A_1$  との積  $(A_1z^{-1}X)$  に入力  $X$  を加算した結果を得て、さらに2段目の遅延出力  $z^{-2}X$  と乗算係数  $A_2$  との積  $(A_2z^{-2}X)$  を加算して、2次FIRフィルタを構成している。つまり、図2-1の出力  $Y$  は、

$$Y = X + A_1z^{-1}X + A_2z^{-2}X = (1 + A_1z^{-1} + A_2z^{-2}) X \quad (2-1)$$

と表される。

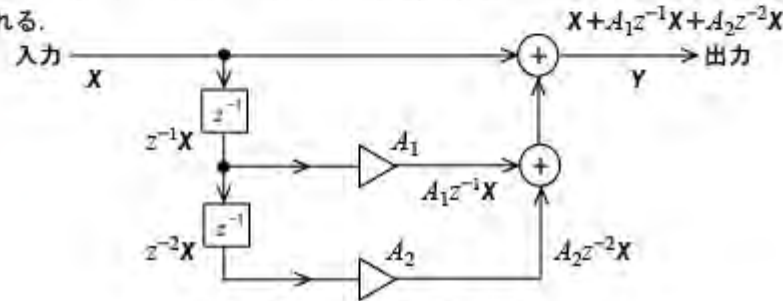


図 2-1 2次FIRの基本構成

よって、2次FIRフィルタの伝達特性  $H$  は、入力  $X$  に対する出力  $Y$  の比であるから、

$$H = \frac{Y}{X} = 1 + A_1z^{-1} + A_2z^{-2} \quad (2-2)$$

で与えられる。

例えば、 $A_1=2$  および  $A_2=1$  とすると2次LPFを実現することができる（図2-2）。

図2-2の伝達特性は、

$$H = 1 + 2z^{-1} + z^{-2} \quad (2-3)$$

$$= (1 + z^{-1})^2 \quad (2-4)$$

と表され、1次LPFの伝達特性を2乗した形になっている。そこで、1次LPFの直流（0[Hz]）におけるゲインを同じにするため、利得定数  $h_0=0.5$  に変えてから周波数アナライザ画面にゲイン特性を表示してみる（図2-3）。図2-3には、2次LPFのゲイン特性（緑色）と、比較のために1次LPF（ピンク色）を示してある。両者の違いから、2次のほうが周波数0[Hz]（直流）付近におけるゲインを急峻にして広い周波数範囲にわたり小さくできることが分かる。

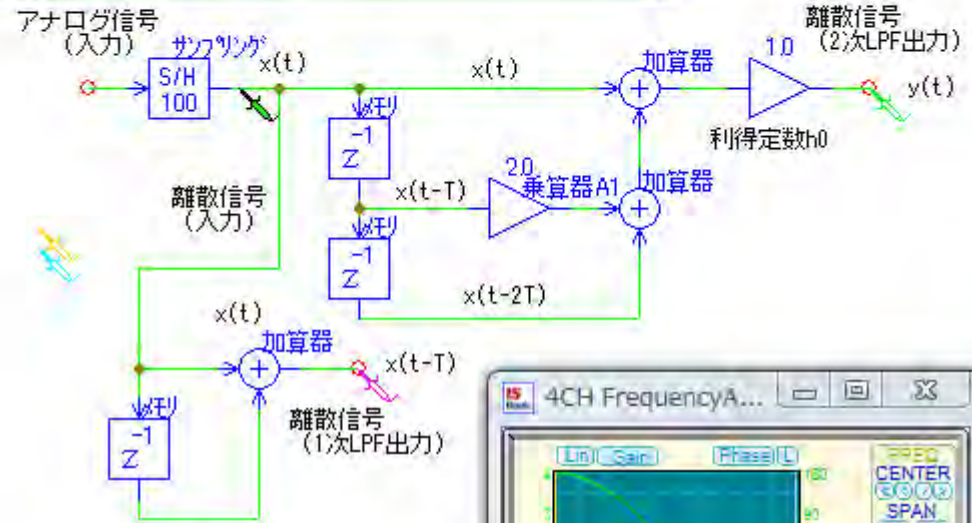


図 2-2 2次LPFの基本構成

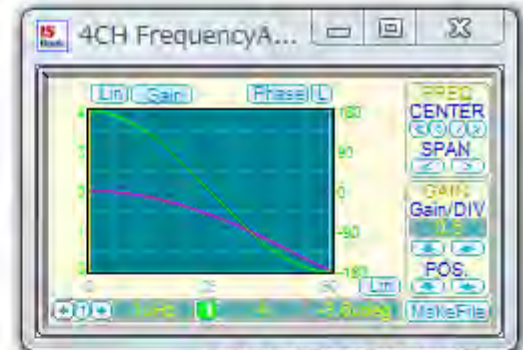


図 2-3 2次LPFのゲイン特性

2次LPFのゲイン特性  $|H|$  は、式 (2-3) が、

$$H = 1 + 2z^{-1} + z^{-2} = z^{-2} (z^2 + 2z + 1) \quad (2-5)$$

と変形できるので、両辺の絶対値を採ることにより、 $|H| = |z^{-2}| |z^2 + 2z + 1|$  と表される。続いて、式 (1-41) と式 (1-42)、付録1 の式 (1-17) を適用すれば、

$$|H| = |2 + 2\cos(\omega T)| = 2|1 + \cos(\omega T)| = 4\cos^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (2-6)$$

となり、図2-3の緑色のローパス特性が得られる。



check BOX（正解と思う数字を半角で入力し、ENTERキーを押す）

伝達特性  $H = (1 + z^{-1})^2$  のゲイン  $|H|$  はどれか。サンプリング角周波数は  $\omega$  [rad/秒] とする。①  $2\cos^2(\omega T)$  ②  $4\cos^2(\omega T)$

③  $4|\cos(\omega T)|$  ④  $4|\cos(2\omega T)|$  (答)

二の二

2次HPFの基本構成とゲイン特性【1/2】

こんどは、図2-4のように、 $A_1=-2$  および  $A_2=1$  とすると2次HPFを実現することができる。伝達特性  $H$  は、利得定数  $h_0=1$  として、

$$H=1-2z^{-1}+z^{-2} \quad (2-7)$$

$$=(1-z^{-1})^2 \quad (2-8)$$

と表され、1次HPFの伝達特性  $H$  を2乗した形になっている。そこで、1次HPFのナイキスト周波数  $f_N (=f_s/2)$  におけるゲインを同じにするため、利得定数  $h_0=0.5$  に変えてから周波数アナライザ画面にゲイン特性を表示してみる(図2-5)。図2-5には、2次HPFのゲイン特性(緑色)と、比較のために1次HPF(ピンク色)を示してある。両者の違いから、2次のほうがナイキスト周波数付近  $f_N$  におけるゲインを急峻にして広い周波数範囲にわたり小さくできることが分かる。

2次HPFのゲイン特性  $|H|$  は、式(2-7)が、

$$H=1-2z^{-1}+z^{-2}=z^{-1}(z+1-2+z^{-1}) \quad (2-9)$$

と変形できるので、両辺の絶対値を採ることにより、

$$|H|=|z^{-1}||-2+(z+1+z^{-1})|$$

と表される。続いて、式(1-41)と式(1-42)を適用すれば、

$$|H|=|-2+2\cos(\omega T)|=2|1-2\cos(\omega T)|=4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (2-10)$$

となり、図2-5の緑色のゲイン特性が得られる(付録1の式(付1-16)を参照)。

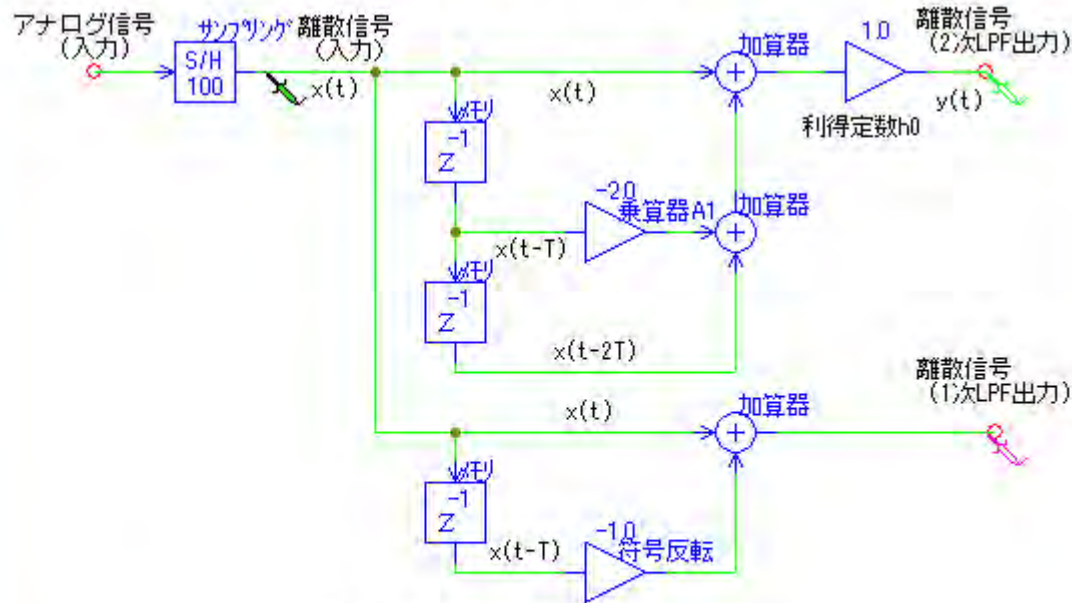


図 2-4 2次HPFの基本構成

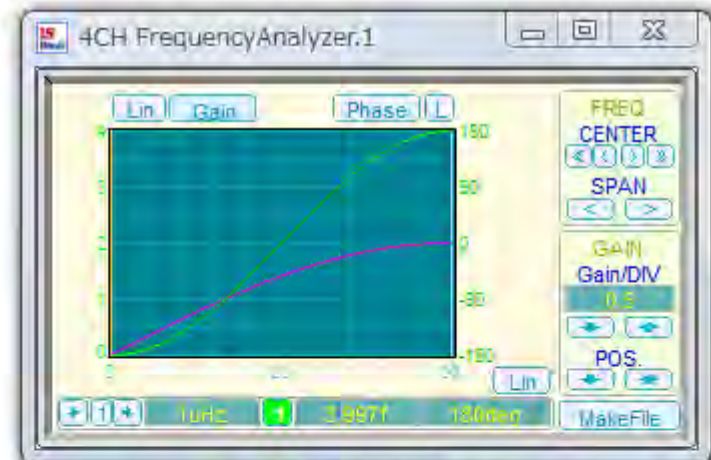


図 2-5 2次HPFのゲイン特性

二の三

基本バンドパス・フィルタ（2次BPF）【1/2】

次は、図2-7のように、 $A_1=0$  および  $A_2=-1$  とすると2次BPFを実現することができる。伝達特性  $H$  は、

$$H=1-z^{-2} \quad (2-13)$$

$$=(1+z^{-1})(1-z^{-1}) \quad (2-14)$$

と表され、1次LPFと1次HPFの各伝達特性、

$$H_1=1+z^{-1} \quad (2-15)$$

$$H_2=1-z^{-1} \quad (2-16)$$

の積になっている。

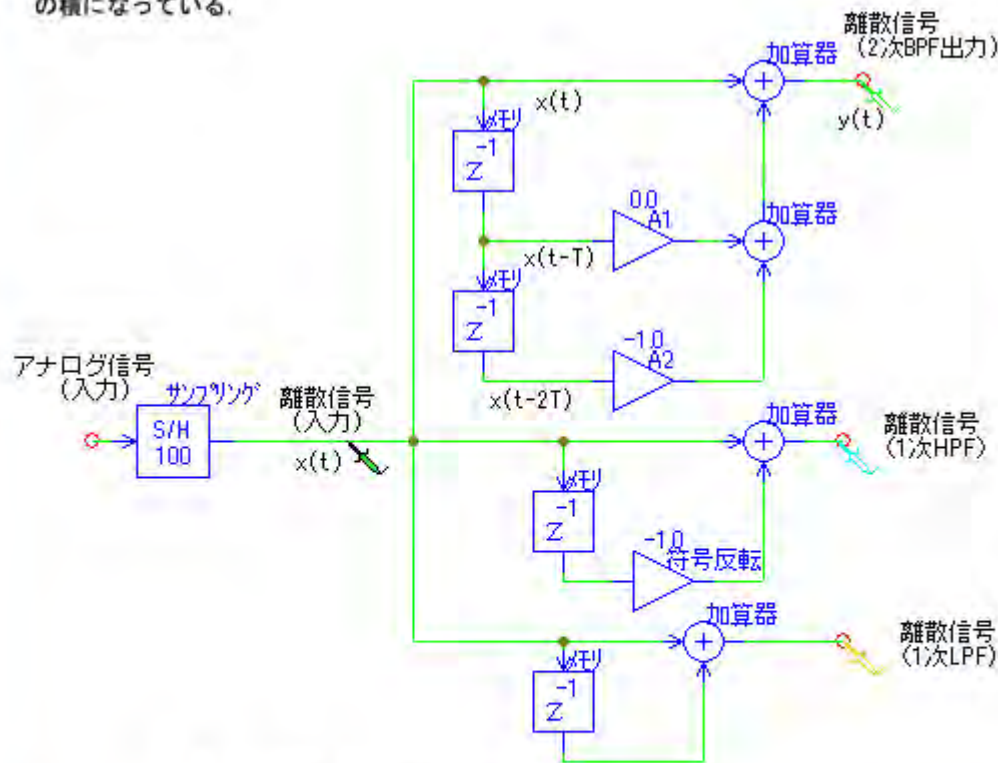


図 2-7 基本バンドパス・フィルタの基本構成

そこで、周波数アナライザ画面にゲイン特性を表示してみる(図2-8)。図2-8には、2次BPFのゲイン特性(緑色)と、説明の便宜上1次LPF(オレンジ色)、1次HPF(水色)を示してある。

2次BPFのゲイン特性は、式(2-13)が、

$$H=z^{-1}(z^{+1}-z^{-1}) \quad (2-17)$$

と変形できるので、両辺の絶対値を採ることにより、

$$|H|=|z^{-1}||z^{+1}-z^{-1}|$$

と表される。続いて、式(1-67)と式(1-68)を適用すれば、

$$|H|=|z^{-1}||j2\sin(\omega T)|=2|j||\sin(\omega T)|$$

であり、 $|j|=1$ なので、

$$|H|=2|\sin(\omega T)| \quad (2-18)$$

となり、図2-8の緑色のゲイン特性が得られる。

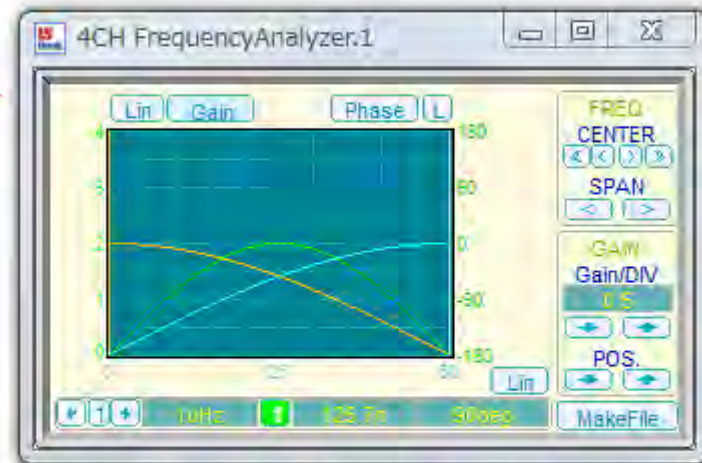


図 2-8 基本バンドパス・フィルタのゲイン特性

二の11

ローパスノッチ・フィルタ【1/2】

いま、直流 0 [Hz]でのゲインを 1 に正規化し、 $0 \sim f_s/10$ の周波数 ( $f_s$  はサンプリング周波数) では「ゲインが  $1/\sqrt{2} \sim 1$  の範囲」で、 $f_s/4 \sim f_s/2$ の周波数では「ゲインが 0.3 以下」となるようなローパス・フィルタを実現したいとする (図 2-35)。例えば、図 2-36 において中段の 1 次 LPF だけでは **ピンク色** のゲイン特性、下段の  $f_s/4$  でゲインが 0 になるノッチ・フィルタだけでは **オレンジ色** のゲイン特性となり、いずれも目的を達成できないことは明白である

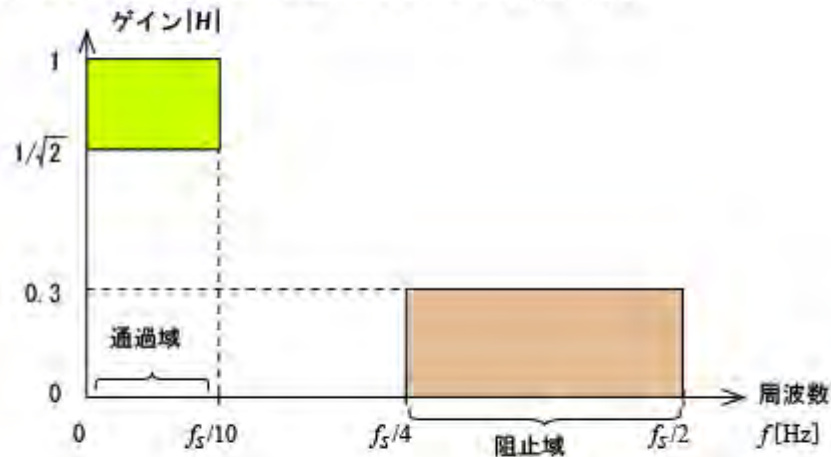


図 2-35 ローパス特性の設計仕様

こんなときには、ノッチ・フィルタと 1 次 LPF を連続構成した FIR フィルタを考えてみるとうまくいくことがある (図 2-36 の上段)。周波数アナライザのゲイン特性 (緑色) より、 $f_s/4$  にノッチ周波数を有するローパス特性であることから、**ローパスノッチ・フィルタ**と呼ばれる。つまり、連続構成する二つの FIR フィルタの良いところを組み合わせると、所望のゲイン特性が実現できるというアイデアに基づくものである。なお、図 2-36 の三つのフィルタ構成では、サンプリング周波数  $f_s = 100$  [Hz] とし、直流でのゲインが 1 になるように正規化するため、利得定数で調整している。

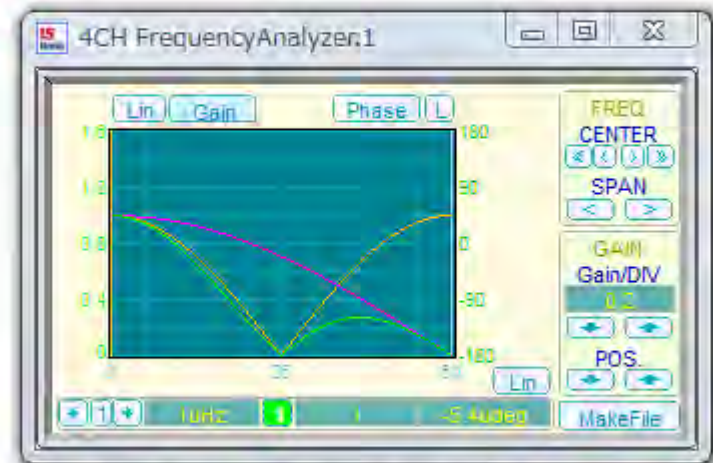
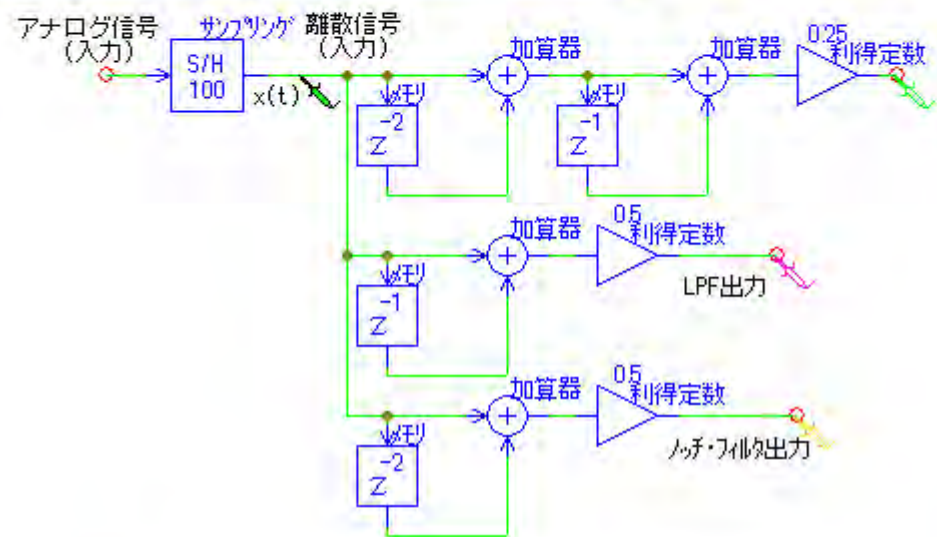


図 2-36 ローパス・フィルタの基本構成とゲイン特性

第三章

IIRフィルタの基礎を知ろう

これまでのFIRフィルタは、出力を入力側に戻すフィードバックがなかったが、フィードバックありの構成にしたものがIIRフィルタである。IIRは Infinite Impulse Responseの頭文字を並べたもので、無限の継続時間のインパルス応答を有するという意味であり、2個のメモリ、5個の乗算器、2入力1出力の加算器が4個で構成される例を図3-0に示す。

それでは、IIRフィルタを理解するためのウォーミングアップとして、図3-0の乗算係数(A, B, C, D, E)を書き換え、正弦波(cos波)やインパルス入力に対する応答出力波形や周波数選択特性のようすについて、楽しみながら実験を進めてもらいたい。

例えば、正弦波は周波数、インパルスは電圧の大きさを変えられるようになっているので、矢印カーソルを部品を中心から上下にずらして左クリックしてほしい。また、オシロスコープの **NEW** や **FREEZE**、周波数アナライザの **Phase** や **Gain**、**Lin** や **dB** などのスイッチを左クリックして、IIRフィルタの性質を感じ取ってもらいたい。その際、FIRフィルタとは違って、フィードバックの乗算係数(A, B)の値によっては、出力波形(ピンク色)が画面からはみ出して消えてしまう(不安定になる)ことがあるので、注意してほしい。万が一、不安定になったときは、オシロスコープの **NEW** スイッチを左クリックして初期化してやり直す必要がある。

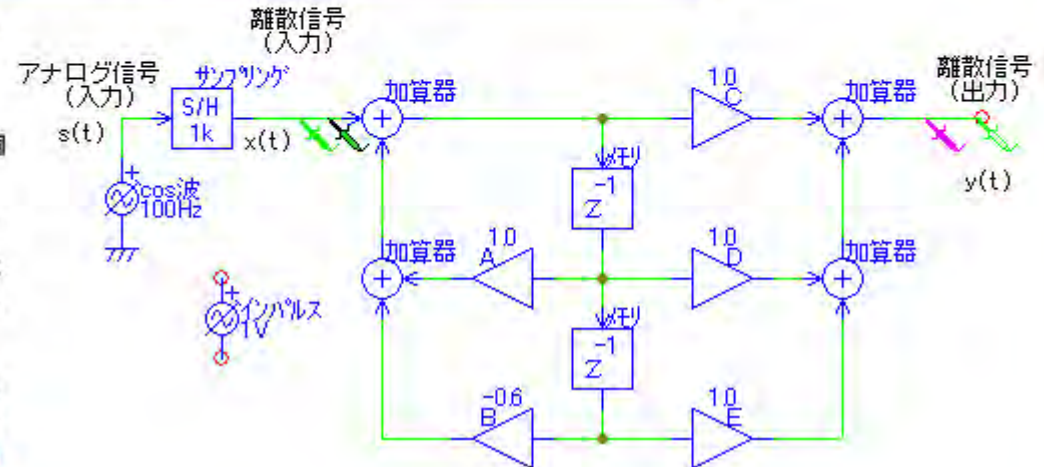
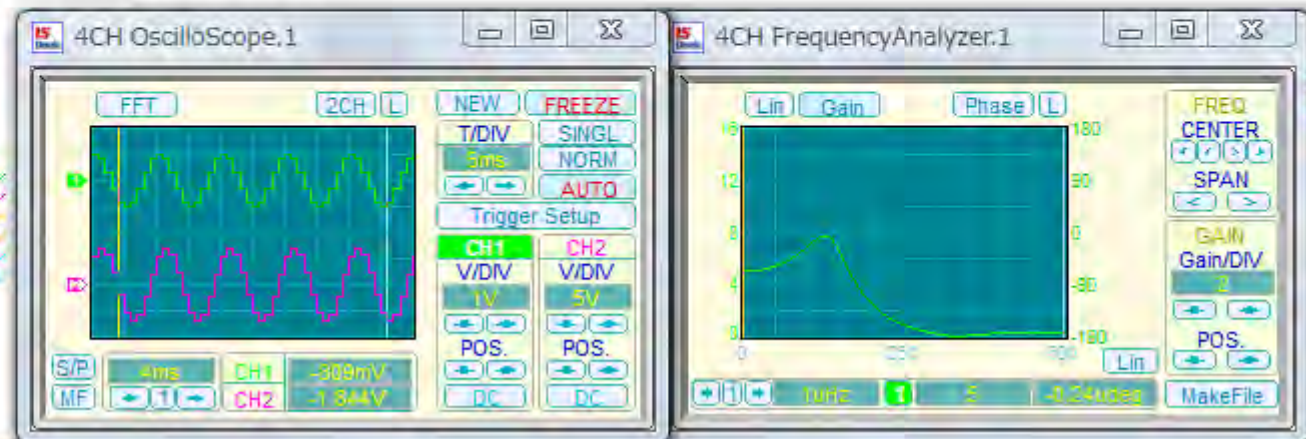


図 3-0 IIRフィルタの構成例



三の1

IIRフィルタとはどんなもの？【1/2】

IIRフィルタは、現在の入力信号  $x(t)$  と過去の  $M$  個の入力信号、すなわち

$$\{x(t-T), x(t-2T), \dots, x(t-MT)\}$$

および  $N$  個の出力信号、すなわち

$$\{y(t-T), y(t-2T), \dots, y(t-NT)\}$$

から出力信号を得るシステムである (図3-1)。出力信号  $y(t)$  は、 $M+1$  個の乗算

係数、すなわち

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_M\}$$

と  $N$  個の乗算係数

$$\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$$

を用いて、

$$y(t) = b_1y(t-T) + b_2y(t-2T) + \dots + b_Ny(t-NT) + a_0x(t) + a_1x(t-T) + \dots + a_Mx(t-MT) \quad (3-1)$$

で表される。このとき、 $T$  [秒] ごとのサンプリング処理、すなわち  $t=kT$  ( $k$  は整数) における信号値に着目して、

$$x[k] = x(kT), \quad y[k] = y(kT)$$

と表記すれば、式 (3-1) と等価な差分方程式は、

$$y[k] = b_1y[k-1] + b_2y[k-2] + \dots + b_Ny[k-N] + a_0x[k] + a_1x[k-1] + a_2x[k-2] + \dots + a_Mx[k-M] \quad (3-2)$$

となり、IIRデジタル・フィルタ (略してIIRフィルタ) と称する。これ以降、式 (3-1) あるいは式 (3-2) の表現を適切に用いて説明するが、DSPアナライザによるシミュレーションは式 (3-1) の表現形式に基づく。

それでは、次ページの図3-2でIIRフィルタの入出力応答について、デジタルテストを用いて1ステップずつ解析してみよう (サンプリング時間  $T$  [[秒]=0.1

[秒])。このIIRフィルタの出力は、

$$y(t) = 0.5y(t-T) + 2x(t) + 6x(t-T) \quad (3-3)$$

で計算され、2個のメモリ、3個の乗算器 (図3-1の乗算係数  $a_0=2$ ,  $a_1=6$ ,  $b_1=0.5$  に設定)、2個の加算器から構成されている。ただし、 $t < 0$  のとき  $y(t)=0$  とする。

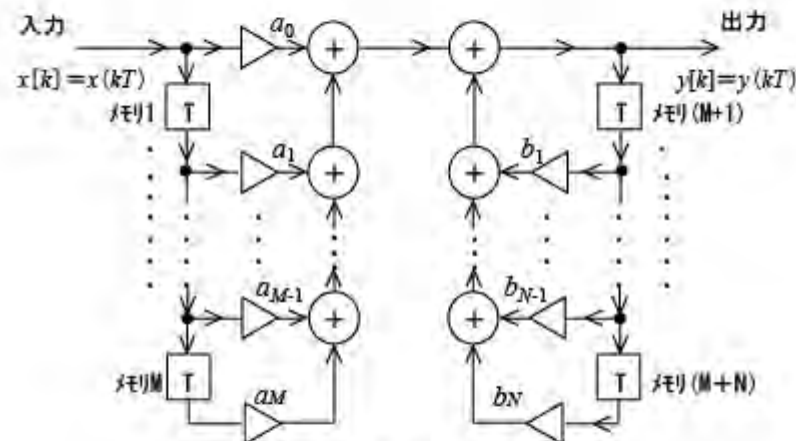


図 3-1 IIRフィルタのシステム構成例

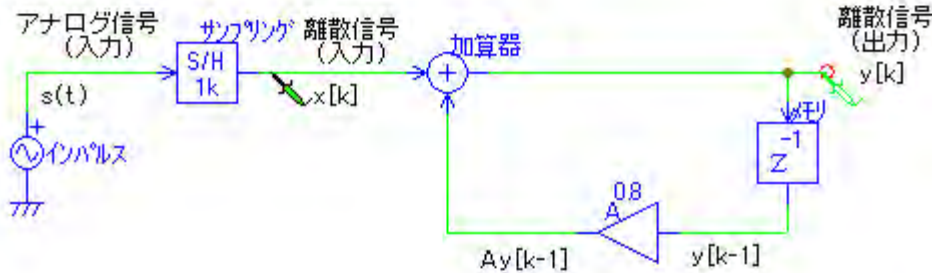
三の3

IIRフィルタのゲイン特性を見てみよう【1/2】

それでは、図3-5に示す1個のメモリ、1個の乗算器、1個の加算器で構成されるIIRフィルタについて、乗算係数 $A$ をいろいろな値に設定し、ゲイン特性の違いを調べてみよう。このフィルタの入出力関係は、

$$y[k] = Ay[k-1] + x[k] \quad (3-11)$$

であり、サンプリング時間 $T=1[\text{ms}]$ 、すなわちサンプリング周波数 $f_s$ は $1/T$ に等しいので $1[\text{kHz}]$ とする。



周波数アナライザのゲイン特性から分かるように、乗算係数 $A$ の値に応じてローパス ( $A>0$ )、ハイパス ( $A<0$ ) の各特性を実現できる (図3-6)。なお、ゲイン特性の計算においては、前節三の2の安定性を考慮していない。

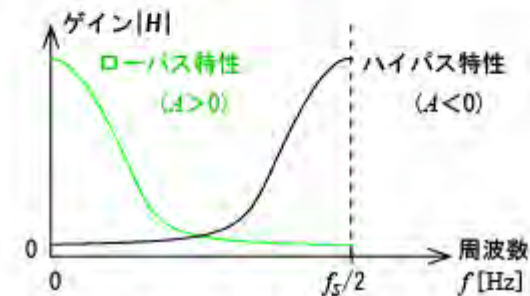


図 3-6 IIRフィルタ (図3-5) の乗算係数 $A$ によるゲイン特性

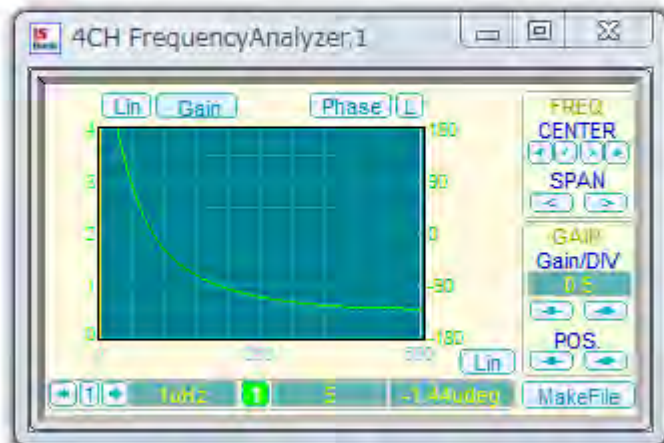


図 3-5 IIRフィルタ (メモリ1個) のゲイン特性



三の九

2次IIRフィルタの基本構成とゲイン特性【1/2】

図3-23に示すシステム構成は、1サンプル前と2サンプル前の出力信号を入力にフィードバックして加えている。このとき、1サンプル前の出力をA倍、2サンプル前の出力をB倍するための乗算係数AとBを適切に設定すれば、任意の周波数における出力をブーストしてピーク状の変化を有する。これを**ピーキング** (peaking) という。

それでは、周波数アナライザを利用して、乗算係数AとBの値に対するゲイン特性の違いを調べてもらいたい。

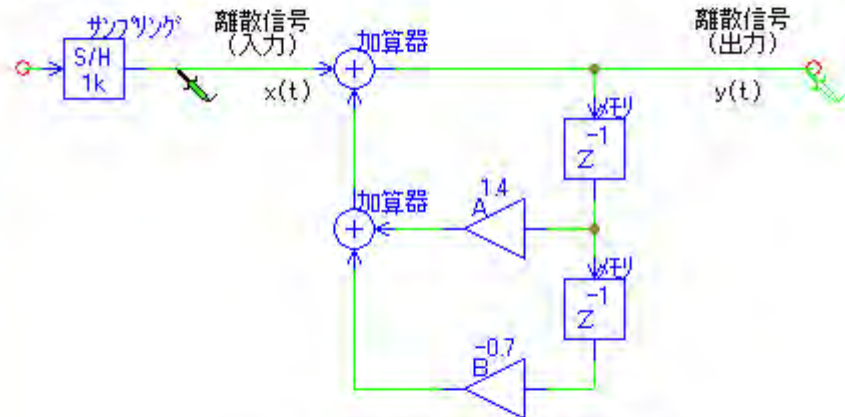


図 3-23 2次IIRフィルタの基本構成

さて、図3-23の入出力関係は、

$$y(t) = Ay(t-T) + By(t-2T) + x(t) \quad (3-50)$$

であり、両辺を複素ベクトル表示すれば、

$$Y = Az^{-1}Y + Bz^{-2}Y + X \quad (3-51)$$

となり、伝達特性Hは、

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{1}{1 - Az^{-1} - Bz^{-2}} \quad (3-52)$$

と表される(図3-24)。なお、伝達特性Hの変数zの最高次数が2次なので、図3-23のシステムは2次IIRフィルタと呼ばれる。

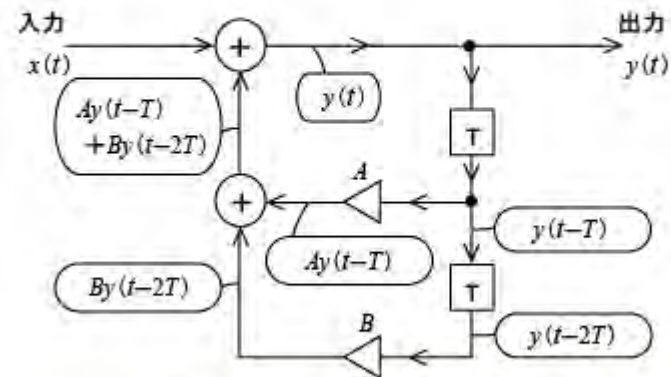


図 3-24 2次IIRフィルタの入出力関係

第四章

いろいろなIIRフィルタを作ってみよう【1/2】

本章では、IIRフィルタのゲイン特性に着目して、さまざまなタイプを紹介する。

代表的なゲイン特性を有するIIRフィルタとして、

- ① ローパス・フィルタ
- ② ハイパス・フィルタ
- ③ バンドパス・フィルタ
- ④ バンドエリミネート・フィルタ
- ⑤ オールパスフィルタ

を取り上げて説明する。そこで、図4-0に示すIIRフィルタにおいて、表4-1の係数値(A, B, C)とメモリの遅延回数を設定し、周波数アナライザでゲイン特性の特徴を体感してもらいたい。

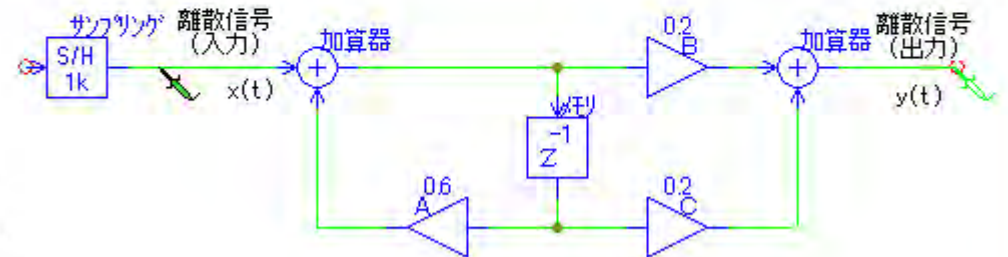


表 4-1 各種IIRフィルタのパラメータ設定例

種類	乗算係数			メモリの遅延回数
	A	B	C	
①	0.6	0.2	0.2	1
②	-0.6	0.2	-0.2	1
③	-0.6	0.2	-0.2	2
④	0.6	0.2	0.2	2
⑤	0.6	-0.6	1	1

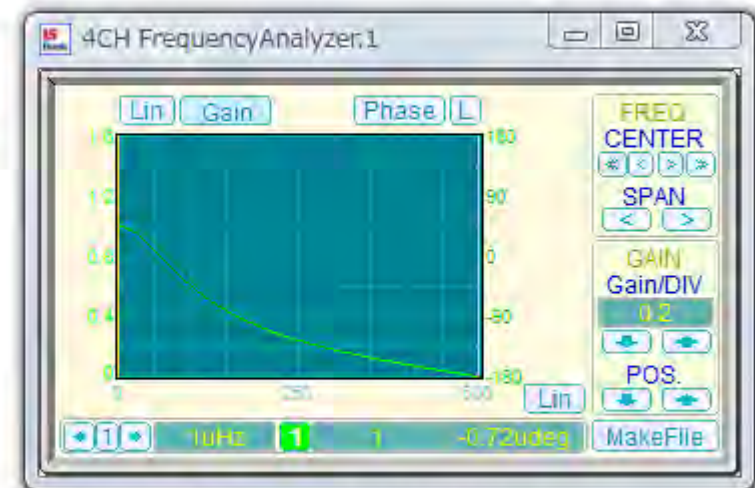


図 4-0 IIRフィルタのゲイン特性

四の1

1次FIR-1次IIR複合フィルタ（双1次フィルタ）【2/2】

なお、図4-3(a)の周波数アナライザ画面に双1次IIRフィルタのゲイン特性（緑色）が表示されるので、乗算係数  $A$  と  $B$  をいろいろな値に変えて違いを調べてもらいたい。同時に、図4-3(b)のオシロスコープ画面で周波数可変の正弦波入力（緑色）に対する応答出力波形（ピンク色）を観測し、分母係数がIIRフィルタの安定性に深く関与していることも確認してほしい。このとき、波形が発散して不安定になると、出力波形が発散して表示されなくなったり、画面からはみ出したりするので、NEW スイッチを左クリックして初期化した後、再表示する必要がある。

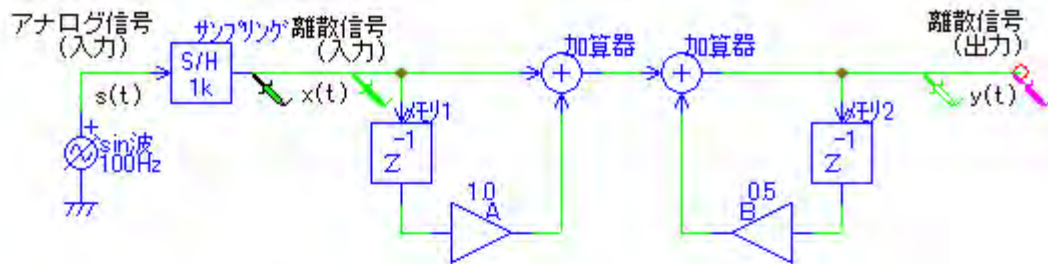

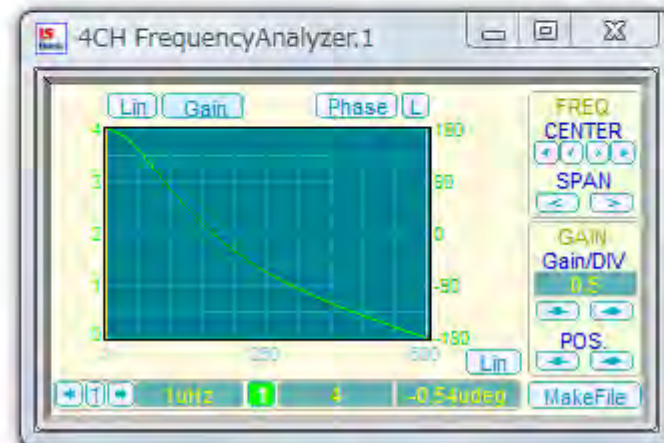


図 4-2 双1次IIRフィルタ回路

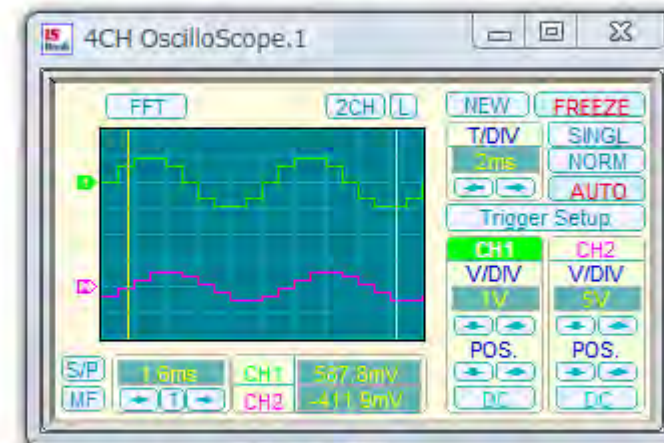
 check BOX（正解と思う数字を半角で入力し、ENTERキーを押す）  
伝達特性  $H = \frac{1+0.5z^{-1}}{1-0.95z^{-1}}$  を有する双1次IIRフィルタの

直流におけるゲインはいくらか。

- ① 0   ② 10   ③ 20   ④ 30   ⑤ 40   (答)



(a) ゲイン特性



(b) 入出力波形

図 4-3 双1次IIRフィルタの測定結果

四の3

双1次ローパスIIRフィルタ

図4-7のシステム構成を見てもらいたい。双1次IIRフィルタで乗算係数  $A=1$  としたもので、入出力関係と伝達特性  $H$  はそれぞれ、

$$y(t) = By(t-T) + h_0 [x(t) + x(t-T)] \quad ; \quad h_0 = \frac{1-B}{2} \quad (4-16)$$

$$H = h_0 \frac{1+z^{-1}}{1-Bz^{-1}} \quad (4-17)$$

と表される（「四の1」を参照）。ただし、分母係数  $B$  は安定性を考慮し、

$$-1 < B < 1 \quad (4-18)$$

の範囲で、利得定数  $h_0$  ( $>0$ ) は直流0[Hz]におけるゲイン1に正規化するためのものである（「付録5」を参照）。

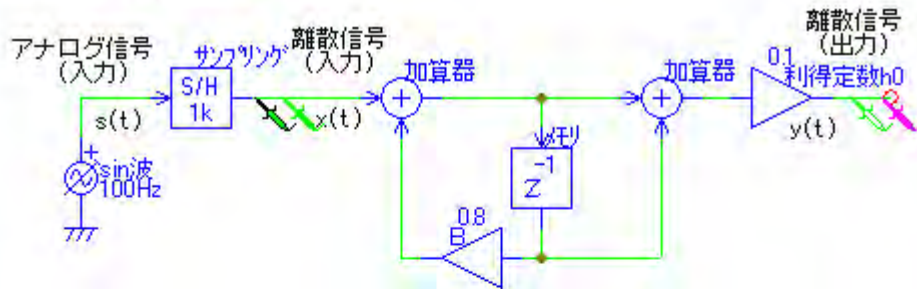


図 4-7 双1次ローパスIIRフィルタ

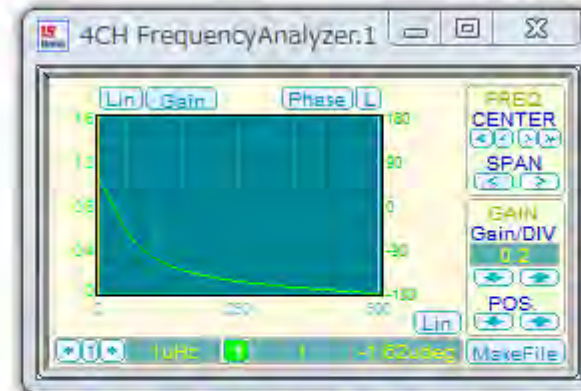
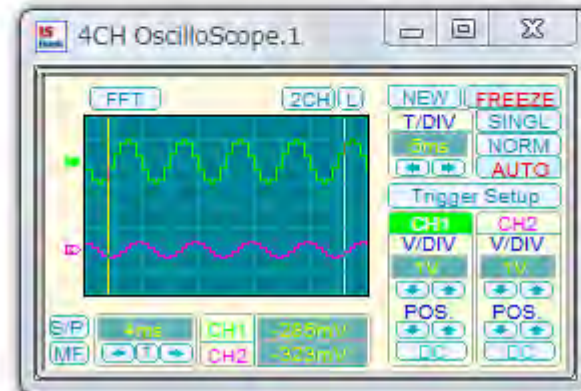
それでは、係数  $B$  と利得定数  $h_0$  をいろいろな値に変え、オシロスコープと周波数アナライザで調べてみよう。

まず、オシロスコープでは、一定の振幅  $\pm 1$  [V] の  $\sin$  波で入力周波数  $f$  [Hz] を増減することにより、出力波形の大きさに違い（周波数を高くすると出力が小さくなっていくというローパス特性）が分かる。

また、周波数アナライザでは、式 (4-17) の絶対値  $|H|$ 、すなわち、

$$|H| = h_0 \frac{|1+z^{-1}|}{|1-Bz^{-1}|} = h_0 \frac{\left| \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|}{\sqrt{1+B^2-2B\cos(\omega T)}} \quad ; \quad \omega = 2\pi f [\text{rad/秒}] \quad (4-19)$$

のゲイン特性が表示され、ローパス特性が明確に確認できよう（「付録5」を参照）。



check BOX（正解と思う数字を半角で入力し“ENTER”キーを押す）

伝達特性  $H = \frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$  を有する双1次IIRフィルタの周波数25[Hz]におけるゲインはいくらか。ただし、サンプリング周波数は100[Hz]とする。

- ① 1.16 ② 1.21 ③ 1.26 ④ 1.31 ⑤ 1.36 (答)

四の七

双2次IIRフィルタとゲイン特性【2/2】

それでは、係数  $A, B, C, D$  と利得定数  $h_0$  をいろいろな値に変え、周波数可変の正弦波入力に対する応答波形およびゲイン特性について、オシロスコープと周波数アナライザで調べてみよう（図4-19）。

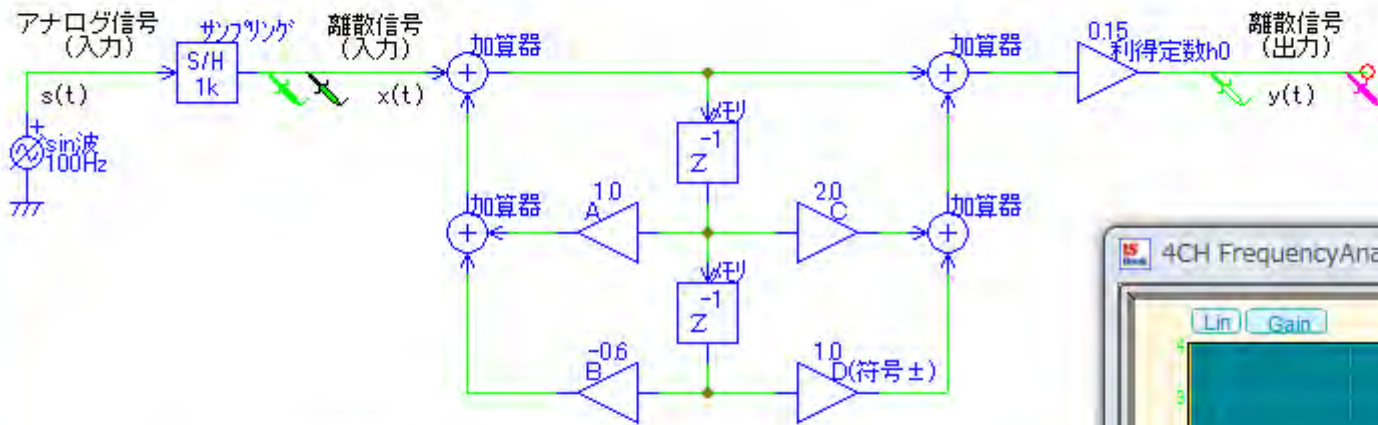
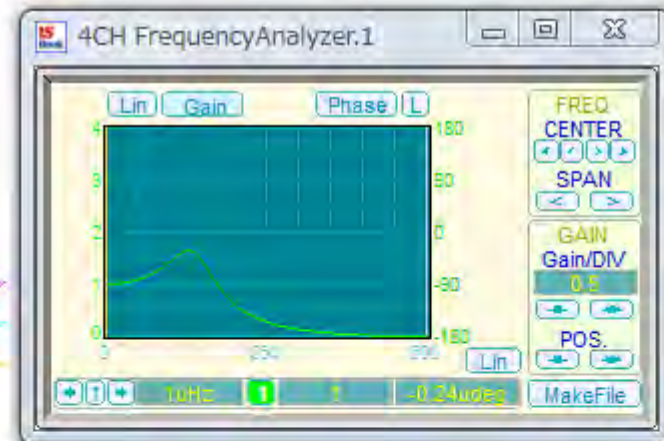
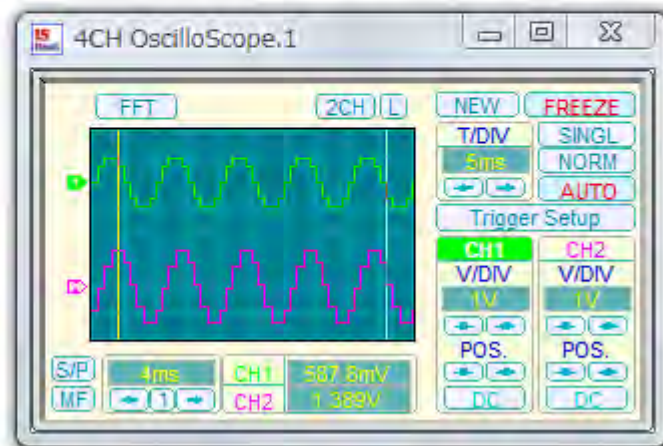


図 4-19 双2次IIRフィルタの基本構成



check BOX (正解と思う数字を半角で入力し“ENTER”キーを押す)

$$\text{伝達特性 } H = \frac{1 + 0.3z^{-1} - 0.7z^{-2}}{1 - 0.95z^{-1} + 0.9z^{-2}} \text{ を有する双2次IIRフィルタのナイキ}$$

スト周波数  $f_N = f_s/2$  におけるゲインはいくらか。

- ① 0    ② 10    ③ 20    ④ 30    ⑤ 40    (答)