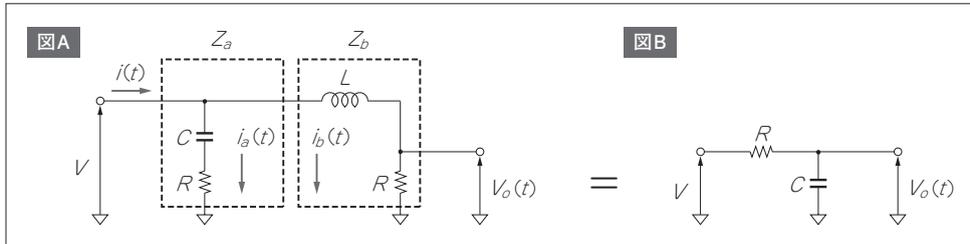


定抵抗回路の時間応答がRC回路の時間応答と同一であることの証明

Column



上記図Bに示したRC回路にステップ信号が入力された場合の時間応答 $v_o(t)$ は、 $V=1$ とすると、

$$v_o(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \dots\dots\dots (A)$$

と表わされます。ここで、図Aの定抵抗回路にステップ信号が入力された場合の時間応答 $v_o(t)$ が上式(A)と同一となることを導きます。

図Aに示す、 Z_a の時間変化 $Z_a(t)$ は、

$$i_a(t) = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

および、コンデンサC両端の電圧、

$$v_C(t) = V \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right\}$$

とすると、

$$\begin{aligned} Z_a(t) &= \frac{v_C(t)}{i_a(t)} + R \\ &= \frac{V \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right\}}{\frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)} + R \\ &= R \cdot \exp\left(\frac{t}{RC}\right) \dots\dots\dots (B) \end{aligned}$$

です。

同様に、 Z_b について求めると、

$$i_b(t) = \frac{V}{R} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right\}$$

ここで、コイル両端の電圧を、

$$v_L(t) = V \cdot \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

とすると、

$$\begin{aligned} Z_b(t) &= \frac{v_L(t)}{i_b(t)} + R \\ &= \frac{V \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)}{\frac{V}{R} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right\}} + R \end{aligned}$$

図B

$$= R \left\{ \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)} \right\} \dots\dots\dots (C)$$

となります。従って、出力電圧 $v_o(t)$ は、

$$v_o(t) = R \cdot \frac{Z_a(t)}{Z_a(t) + Z_b(t)} i(t)$$

と表わされます。ここで、定抵抗回路が成り立っているのであれば、 $R \cdot i(t)$ は入力ステップ信号 V ですから、 $V=1$ とすると、

$$v_o(t) = \frac{Z_a(t)}{Z_a(t) + Z_b(t)} \dots\dots\dots (D)$$

を計算することで、式(A)に相当する定抵抗回路の時間応答を求めることができます。

式(B)、(C)、(D)より、

$$v_o(t) = \frac{R \cdot \exp\left(\frac{t}{RC}\right)}{R \cdot \exp\left(\frac{t}{RC}\right) + R \cdot \left\{ \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)} \right\}}$$

上式を整理すると、

$$v_o(t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\exp\left(\frac{t}{RC}\right) - \exp\left(-\frac{t^2}{LC}\right)}}$$

となります。ここで、 $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ より、 $L = R^2C$ なので、

$$\begin{aligned} v_o(t) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\exp\left(\frac{t}{RC}\right) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right\}}} \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \end{aligned}$$

が求まります。

これは、図BのRC回路のステップ信号入力時の時間応答と同じ式です。

従って、定抵抗回路の時間応答は、RC回路と同じであると考えることができます。